

# Età evolutiva

giugno 1995 | 51

*Rivista di Scienze dello sviluppo*

*Psicologia - Psicologia sociale - Psicoanalisi - Sociologia - Neuropsichiatria infantile -  
Psicofisiologia - Sessuologia - Psicopedagogia - Puericultura - Genetica - Auxologia*

**Fra i contributi di questo numero  
un nucleo monotematico**

---

***Scrittura e diversità:  
per una cultura dell'interazione***

a cura di CLOTILDE PONTECORVO

---

*Contributi di:*

DANIELA FABBRETTI - EMILIA FERREIRO  
- VITTORIANA FILONI - RAIMONDA MORANI - MARINA PASCUCCI FORMISANO -  
CLOTILDE PONTECORVO

  
GIUNTI

Francesco Aglì  
Aurelia Martini

## Rappresentazione e notazione della quantità in età prescolare

*Osservazioni sul ruolo  
della proposta didattica*

Fra i tanti e sorprendenti comportamenti che si possono osservare e che abbiamo osservato nei bambini quando hanno a che fare con i numeri, siamo arrivati pian piano a interessarci in particolare della costruzione dell'aritmetica scritta, un aspetto che non viene spesso considerato nei lavori classici sulla costruzione del numero nel bambino.

L'aritmetica "scritta" richiede l'uso di simboli e convenzioni; simboli e convenzioni che l'adulto considera di solito di facile acquisizione, se non addirittura scontati. Già Sinclair de Zwart (1983) rilevava però che l'aritmetica viene insegnata come se la concettualizzazione delle operazioni coincidesse con la loro simbolizzazione scritta, con la loro rappresentazione formale. Occorre rendersi conto che la notazione delle operazioni aritmetiche e la stessa notazione delle quantità richiedono competenze e presentano difficoltà peculiari.

L'esigenza di capire meglio in che modo le strategie ingenue messe in atto dai bambini interagiscono con i sistemi formali che si insegnano a scuola, al fine di acquisire elementi per un ripensamento degli atteggiamenti e delle proposte didattiche, ha sollecitato la nostra indagine.

Le ricerche e gli studi sulla formazione del concetto di numero sono ormai molti e significativi. Nell'impostare il nostro lavoro\* abbiamo soprattutto tenuto conto di quelli che in modo più diretto si sono occupati della costruzione dell'aritmetica scritta (Sastre e Mo-

reno, 1976; Hughes, 1980; Kamii, 1980; Sinclair de Zwart, 1982 e 1988; Pontecorvo, 1985; Moser, 1985; Pontecorvo *et al.*, 1990).

I bambini di età prescolare utilizzano diverse strategie di notazione delle quantità che possono essere collocate a diversi livelli. Secondo lo schema interpretativo di Pontecorvo (1985), che, tra tutti, a noi è sembrato il più adeguato, si possono individuare 6 livelli (uso di un *segno continuo*, uso di *segni discreti*, uso di una *corrispondenza quantitativa* tra segni e oggetti, uso dei *numerali "in seconda battuta"*, uso del *numerale in modo non esclusivamente cardinale, padronanza dei numerali*). Rimane aperto il problema se questi livelli si possano o meno ordinare secondo una sequenza evolutiva.

Per quanto riguarda la notazione delle operazioni aritmetiche, già Sastre e Moreno (1976) avevano rilevato che ancora i bambini di 6-7 anni, alla richiesta di usare carta e matita per comunicare ai compagni che avevano aggiunto o tolto oggetti in una raccolta, pur essendo perfettamente in grado di operare addizioni e sottrazioni, non utilizzavano spontaneamente i formalismi convenzionali (i segni +, -, =), ma ricorrevano ad altri modi (cancellare con una riga, disegnare una mano per simbolizza-

\* Questo articolo è una versione sintetica e riveduta di due comunicazioni presentate rispettivamente al XX GIRP-Group International de Recherche en Pédagogie de la Mathématique (Locarno, agosto 1991) e al XXI GIRP (Cagliari, luglio 1992)

re l'aggiungere o il togliere, scrivere le parole “aggiungi” o “togli”).

Fenomeni analoghi sono stati rilevati da Kamii (1980) nel corso di uno studio sulle interpretazioni infantili delle addizioni e delle sottrazioni e sull'uso dei segni convenzionali.

Queste ricerche mettono in luce che occorre tener conto del processo di costruzione dell'aritmetica scritta da parte dei bambini e dei possibili rischi dovuti all'introduzione precoce di formalismi (rappresentazioni simboliche al secondo ordine).

Le ipotesi che hanno guidato la nostra ricerca sono dunque state le seguenti: a) è possibile ordinare secondo una sequenza evolutiva le strategie ingenue utilizzate dai bambini di 3-6 anni per la notazione delle quantità e la scrittura dei numerali; b) c'è un rapporto tra la proposta e la risoluzione di situazioni problematiche di tipo additivo e la notazione delle operazioni aritmetiche che la risoluzione delle stesse comporta; c) è possibile individuare una sequenza evolutiva nella rappresentazione grafica delle variazioni di quantità.

La ricerca<sup>1</sup> si è sviluppata nell'arco di due anni scolastici (1990-92) su 147 bambini frequentanti scuole dell'infanzia del Piemonte, della Lombardia e dell'Emilia-Romagna, situate in diversi contesti socio-culturali (urbano, di periferia urbana e rurale), anche per rilevare se la differente provenienza incide sulla scelta e sull'uso di particolari strategie di notazione delle quantità, così come rileva Pontecorvo (1985).

Il gruppo dei bambini osservati era così suddiviso: a) un gruppo di 37 bambini, di età compresa tra i 3 e i 4 anni (età media: 3,6), costituito da bambini al primo anno di frequenza della scuola dell'infanzia; b) un gruppo di 43 bambini, di età compresa tra i 4 e i 5 anni (età

media: 4,6), costituito da bambini al secondo anno di frequenza della scuola dell'infanzia; c) un gruppo di 67 bambini osservati sia a 4-5 anni, sia a 5-6 anni (età media: 5,6), ossia quando frequentavano il terzo anno della scuola dell'infanzia.

Le modalità prescelte e seguite sono state quelle della ricerca empirica, strettamente collegata con l'attività didattica; una ricerca, dunque, che si è connotata come *ricerca-azione*, che si è andata via via definendo in interazione con le rilevazioni e con le risposte dei bambini osservati.

Si sono considerati i diversi aspetti del numero (*cardinale*, che indica la quantità di elementi di una determinata raccolta; *ordinale*, che caratterizza un elemento di un raggruppamento ordinato; *linguistico*, in cui il numero, privo di connotazioni aritmetiche, è visto solo come nome o contrassegno di un dato oggetto, come *espressione di una misura*) e le variazioni di quantità, intese come variazioni di numerosità in dipendenza di operazioni di tipo additivo.

Tutte le rilevazioni sono state effettuate su materiali e protocolli prodotti nell'ambito della scuola. Gli insegnanti delle sezioni coinvolte nella ricerca hanno effettuato direttamente le proposte, le osservazioni e la raccolta delle prestazioni dei bambini sulla base di materiali e procedure elaborati, discussi e concordati con noi. Uno dei due ricercatori ha partecipato in veste di osservatore esterno alla proposta delle situazioni di rilevazione in sezione. Alcune situazioni di rilevazione, soprattutto rispetto alla variazione di quantità, sono state proposte direttamente da noi per evitare che la scelta delle strategie fosse, anche involontariamente, condizionata dall'insegnante.

### Rappresentazione delle quantità e segno del numerale

Al fine di rilevare le diverse strategie di notazione delle quantità e per verificare se si possono ordinare secondo una sequenza evoluti-

<sup>1</sup> La ricerca si è svolta nell'ambito delle attività del NRD operante presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, responsabile scientifico il Prof. Bruno D'Amore, a cui va il nostro ringraziamento per il costante sostegno e le preziose indicazioni.

Tab. 1 - *Situazioni di rilevazione utilizzate per l'indagine sulle strategie ingenue di rappresentazione di quantità e uso dei simboli numerici convenzionali e relativa indicazione delle istruzioni*

- a) *gioco del mago*: richiesta di ricordare con l'uso di un foglio e di pennarelli *quanti* oggetti ha regalato il mago;
- b) *gioco dei messaggi*: richiesta di rappresentare un messaggio costituito da nomi di oggetti (es. sole, albero, ecc.) e nomi di numeri perché possa essere letto da un compagno;
- c) *giochi "a domanda rispondi"*: richiesta di rispondere con l'uso di carta e matita alle domande: «*quanti anni hai?*», «*a che piano abiti?*»;
- d) *gioco del Luna Park*: richiesta di rappresentare *quanti* oggetti (birilli, barattoli, pesci, ecc.) sono stati abbattuti (pescati, ecc.) nel corso del gioco;
- e) *lista della spesa*: richiesta di prenotare dal “magazziniere” solo con l'uso di carta e matita la quantità di oggetti occorrenti per realizzare una costruzione;
- f) *situazioni-storia e filastrocche*: richiesta di ricordare con carta e matita *quanti* oggetti sono stati utilizzati per animare la breve storia (diversa per ogni bambino) costruita con il ricercatore o sono presenti nella filastrocca;
- g) *la storia di Pallino* (vedi oltre);
- h) *numeri, lettere e altri segni*: richiesta di riconoscere e contrassegnare i segni convenzionali dei numerali tra molti altri segni.

va, abbiamo proposto – oltre agli stimoli utilizzati da Pontecorvo (1985) nel corso della sua indagine sulle abilità numeriche e sul riconoscimento dei numeri ed a quelli utilizzati da Sastre e Moreno (1976) nel corso del loro studio sui modi di simbolizzare quantità numeriche – anche altre situazioni che riportiamo in tab. 1; ciò al fine di disporre di un più ampio ventaglio di situazioni di riferimento. Abbiamo predisposto sempre situazioni di rilevazione “a misura di bambino” e con una forte connotazione ludica, tale da ridurre l'eventuale ansia che avrebbe potuto essere connessa al compito se presentato in una situazione più tradizionalmente scolastica.

In sintesi, le diverse prestazioni dei bambini, effettuate in contesti diversi e sulla base di stimoli diversi, da noi rilevate ed analizzate, si possono raccogliere nelle seguenti classi:

1. *disegno-scarabocchio*, talvolta di difficile interpretazione, senza un'evidente corrispondenza con gli oggetti e le quantità considerate;

2. *contorno o disegno degli oggetti* (rappresentazione pittorica): si riproduce tante volte l'immagine dell'oggetto quanti sono gli oggetti considerati;

3. *segno-simbolo* (rappresentazione iconica): si riproduce tante volte un segno (tacche, croci, palline, lettere dell'alfabeto o pseudo-lettere) quanti sono gli oggetti considerati;

4. *disegno delle dita della mano*, che indicano la quantità considerata;

5. *simboli numerici personali*;

6. *simboli numerici convenzionali*, ma per indicare il cardinale si scrivono anche gli ordinali precedenti;

7. *segno convenzionale del numerale*: scrittura del numerale singolo.

In tab. 2 riportiamo le percentuali medie dell'utilizzazione delle strategie rilevate, ripartite secondo le tre classi di età.

Il modello di classificazione da noi adottato risulta molto simile a quello elaborato da Pontecorvo (1985). Rispetto a questo, però, sembra mettere meglio in evidenza sia l'uso della mano, non solo come strumento per contare, ma anche come registro, sia il tentativo, peraltro molto interessante, di molti bambini di costruirsi un sistema personale di notazione scritta dei numeri. Questo potrebbe avere qualche raccordo e riscontro con il sistema di numerazione orale personale (inteso come insieme ordinato di etichette) al quale fanno

Tab. 2 - Percentuali medie di uso delle strategie rilevate

STRATEGIE	Fasce di età		
	3a-4a (37 b.)	4a-5a (110 b.)	5a-6a (67 b.)
1. Disegno-scarabocchio	34.5	14.5	-
2. Contorno o disegno degli oggetti	41.6	53.5	18.8
3. Segni-simbolo	22.4	9.5	18.5
4. Disegno delle dita della mano	1.5	5	5
5. Simboli numerici personali	-	5	5
6. Simboli numerici convenzionali...	-	6.6	14.7
7. Segno convenzionale del numerale	-	5.9	38

I 67 bambini di 5a-6a sono stati testati anche quando avevano 4a-5a.

ricorso quasi tutti i bambini lungo il loro processo evolutivo (Cfr. Gelman e Gallistel, 1978 in Pontecorvo, 1985).

Anche la nostra ricerca ha confermato (ma era già forse scontato!) che l'aritmetica "parlata" precede l'aritmetica scritta. La maggior parte dei bambini, a partire dai 4 anni (ed alcuni anche prima), non incontra più difficoltà nel contare gli elementi di una raccolta di oggetti, se in quantità limitata; la maggior parte di questi deve però ancora ricorrere alla rappresentazione pittorica o iconica per "scrivere" la quantità che pure ha esattamente determinato attraverso il conteggio.

Quando è meno forte il controllo del bambino sulle proprie prestazioni, quando la situazione da rappresentare è più complessa e quando maggiore è il coinvolgimento emotivo, circa il 50% del nostro campione di bambini di 4-5 anni non rappresenta in modo esatto la quantità degli oggetti considerati. Dei rimanenti, oltre la metà riproduce gli oggetti (o segni per gli oggetti) nella disposizione spaziale degli oggetti reali; solo il 12% circa dei bambini usa il segno del numerale.

Quando si tratta di rappresentare quantità elevate, si verifica la tendenza a passare dalla rappresentazione pittorica delle quantità alla rappresentazione iconica. Abbiamo inoltre osservato che gli stessi bambini in situazioni di-

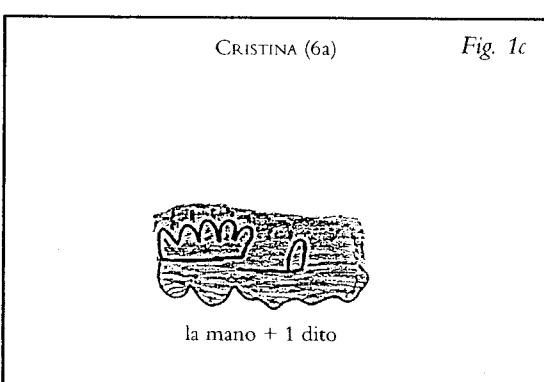
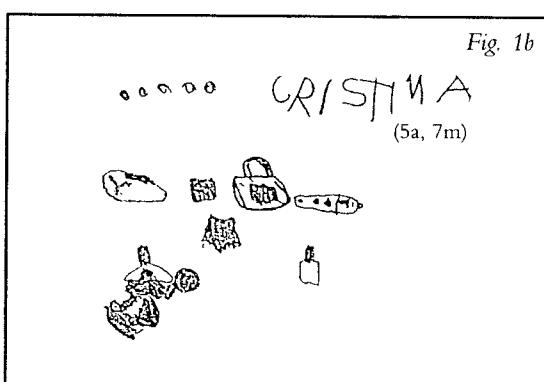
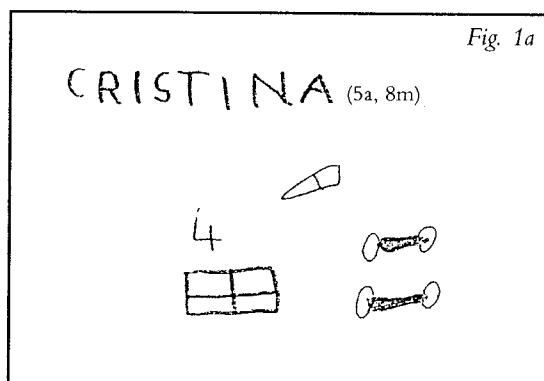


Fig. 1 - In situazioni diverse, differenti strategie di rappresentazione

verse o di fronte a problemi diversi fanno uso di diverse modalità di notazione.

Non sembrerebbe dunque possibile collocare le diverse modalità di notazione scritta

MANUEL (4a, 7m)		
 albero	H quattro	10CL+E casa
 due	○ cinque	 sole

Fig. 2 - Simboli numerici personali

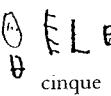
SUSANNA (4a, 5m)		
 due	 tre	 albero
 arancia	 auto	 cinque

Fig. 3 - Segni simbolo: lettere dell'alfabeto e pseudolettere

delle quantità secondo una rigida sequenza evolutiva. Saremmo più propensi a considerare le diverse tipologie individuate, soprattutto quelle contrassegnate con i punti 2, 3, 6, 7, come strategie che i bambini scoprono via via ed utilizzano di volta in volta a seconda del problema di rappresentazione di quantità che devono risolvere. Cristina, ad esempio, nel compilare la "lista della spesa", che le consente di prenotare i "pezzi" necessari per realizzare la costruzione che ha in mente, usa il segno del numerale, disegna gli oggetti e le monete per "ricordare" di quante monete disponeva e "quanti" oggetti ha comprato al mercatino dei giocattoli e disegna la mano per

"scrivere" quanti anni ha (fig. 1). Un percorso evolutivo, seppure differenziato da soggetto a soggetto, è però rintracciabile.

Non appena si abbandona lo scarabocchio indistinto si tende a rappresentare la quantità con segni discreti, seppure sovente in numero diverso da quello degli oggetti considerati, prima di passare al disegno o al contorno degli oggetti stessi. È evidente che in questa fase le prestazioni dei bambini sono fortemente condizionate dalle limitate competenze grafiche. Anche i segni personali (fig. 2) utilizzati talvolta, soprattutto tra i 4 ed i 5 anni, per scrivere il numerale vengono presto abbandonati, non appena i bambini cominciano a padroneggiare i segni convenzionali. Questo è però un passaggio fondamentale per alcuni soggetti e dovrebbe essere maggiormente valorizzato.

### Strategie di notazione

Quando i bambini vengono invitati a "far capire" sul foglio di quanti elementi è costituita la raccolta considerata, di solito contano prima di scrivere o rappresentare. Non è però infrequente che i bambini, le cui prestazioni si collocano ai punti 2 e 3 del nostro modello di classificazione, facciano corrispondere (corrispondenza uno a uno) gli oggetti reali ai disegni o segni che vanno via via tracciando. Per rendere più agevole tale operazione molti bambini riproducono sul foglio, con il disegno o con la rappresentazione iconica, gli oggetti reali mantenendo la stessa disposizione spaziale. Oltre il 50% del nostro sottocampione di bambini di 3-4 anni utilizza questa strategia.

Tra le rappresentazioni iconiche prodotte dai bambini di 4-5 anni, come già anche Pontecorvo (1985), abbiamo rilevato le lettere (o pseudolettere) dell'alfabeto, usate in corrispondenza uno a uno con gli oggetti reali considerati (fig. 3). Abbiamo però rilevato l'uso di questa modalità non solo in ambiente urbano,

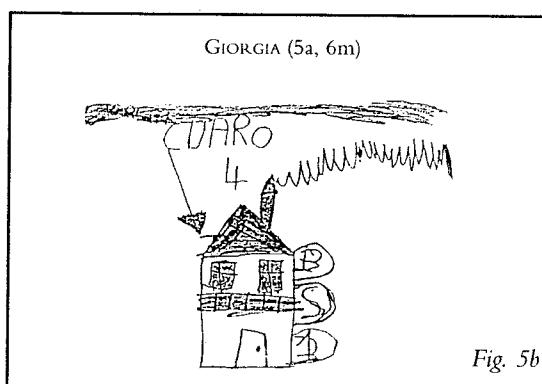
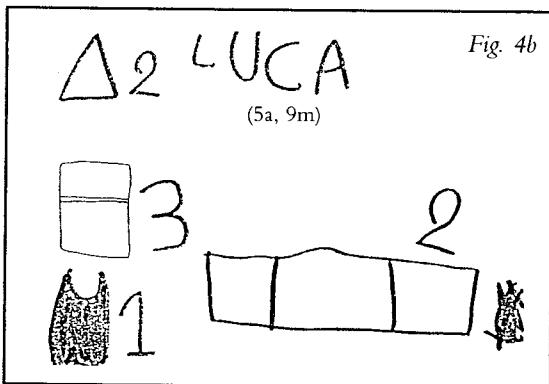
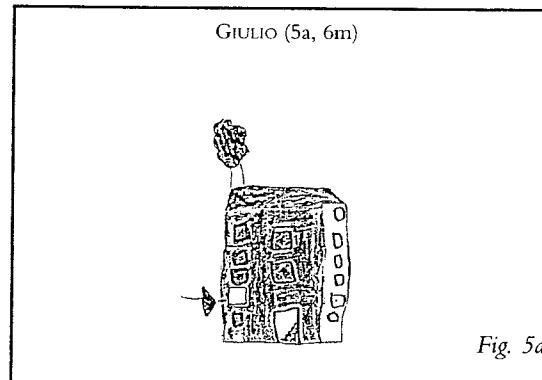
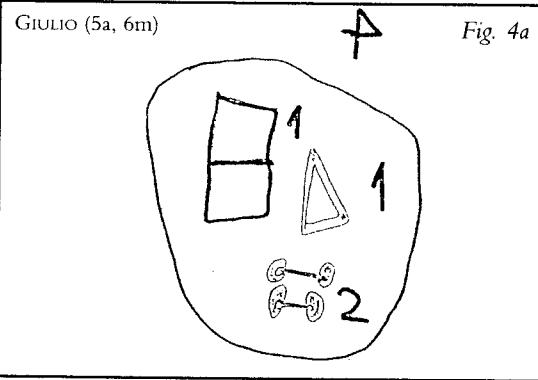


Fig. 4 - Disegno dell'oggetto e scrittura del segno del numerale

ma anche in contesti ambientali di tipo rurale. La diversa provenienza socio-ambientale non sembrerebbe dunque incidere in modo determinante sull'adozione di questa strategia di notazione.

Sono molti i bambini che, ancora a 5-6 anni, utilizzano contemporaneamente sia la rappresentazione pittorica o iconica sia la scrittura del numerale singolo (o la successione dei numeri 1, 2, 3, ...). In alcuni casi la scelta di questa strategia può essere interpretata come una "strategia di verifica"; in generale però non è che la conferma che i bambini hanno ancora bisogno di ancorare l'attributo della numerosità alla concreta rappresentazione della quantità: tanti segni discreti quanti sono gli oggetti considerati. È il caso di Giulio (5,6)

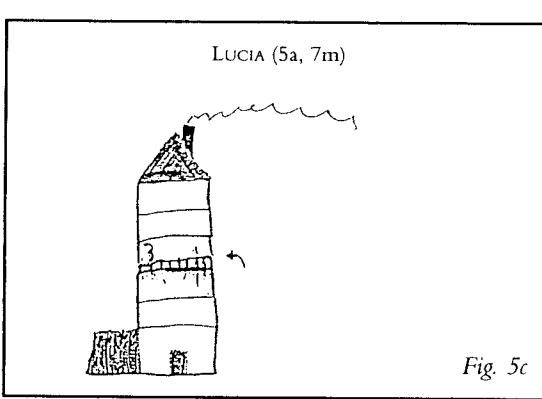


Fig. 5 - Il numero sotto l'aspetto ordinale

che, nel compilare la "lista della spesa", disegna i pezzi che gli occorrono e accanto scrive il numero (fig. 4a). Diversa e, probabilmente, più evoluta la strategia utilizzata da Luca (5,9) che disegna un solo pezzo per tipo, come se

fosse una "marca" e, scrivendo accanto il numero, indica quanti pezzi di ciascun tipo gli occorrono (fig. 4b).

I bambini, a partire dai 4-5 anni, anche spontaneamente rappresentano delle quantità e scrivono numeri considerandoli sotto l'aspetto cardinale; molto meno sotto gli altri aspetti.

L'analisi delle prestazioni dei bambini di 5-6 anni, a cui nel corso dell'indagine abbiamo posto la domanda: «A che piano abiti?», ha però dimostrato che la quasi totalità ha un'idea del significato del numero sotto l'aspetto ordinale. Di questi il 36%, pur senza scrivere il numero sul foglio, indica con l'uso di frecce il piano a cui abita (fig. 5a); il 25% scrive la serie degli ordinali a partire da 1 (1, 2, 3, ...) fino ad arrivare al numero del piano a cui abita (fig. 5b); il 39% scrive il numerale singolo sotto l'aspetto ordinale rafforzato con frecce, sottolineature ed altri elementi grafici (fig. 5c).

Si è osservato che aumenta la percentuale di bambini che scrivono tutta la successione degli ordinali precedenti quello voluto (modalità descritta al n. 6 della nostra classificazione), quando si tratta di scrivere un numero sotto l'aspetto ordinale.

Le rappresentazioni grafiche dei bambini di 5-6 anni, prodotte nel corso di attività di avvio alla misura, fanno rilevare che molti bambini di questa fascia d'età (circa il 60%) usano ormai il numero come misura ed in qualche modo hanno consapevolezza della sua funzione, mentre altri si limitano a riprodurre (tante volte quante sono stati utilizzati) gli oggetti scelti come unità di misura e, con una certa frequenza, a numerarli. Ma in questo caso sembra prevalere ancora l'aspetto cardinale.

A un sottogruppo di 22 bambini del campione di 67 bambini di 5-6 anni abbiamo proposto la storia di Pallino<sup>2</sup> chiedendo loro di raccontarla sul foglio in modo da poter ricordare anche i numeri della storia. L'analisi delle prestazioni dei bambini, pur fornendo elementi meno generalizzabili per la limitata dimensione del campione, ha dato indicazioni interessanti. Infatti 7 bambini su 22 scrivono tutti i

numeri presenti nella storia e altri 9, pur non scrivendo tutti i numeri, trovano soluzioni grafiche per rappresentarli. Soltanto 6 bambini su 22 danno rappresentazioni parziali, ma anche queste consentono interessanti rilevazioni sul livello delle competenze e sulle strategie a cui fanno ricorso. Francesco, ad esempio, pur dando una rappresentazione incompleta della storia, con una freccia indica che Pallino abita al 4° piano, scrive che il protagonista della storia abita al n. 6, disegna i 3 bambini e le 3 tavolette di cioccolato, che hanno rispettivamente 9 (e li numera), 8 e 7 quadretti (fig. 6). Va inoltre osservato che tutti i bambini, per scrivere il numero come contrassegno (consapevoli che il n. 6 non indica né una quantità, né un ordine) hanno scritto il numerale singolo.

### Osservazioni sulla rappresentazione delle variazioni di quantità

La vita quotidiana pone problemi, anche ai bambini di 3-6 anni, la cui soluzione richiede operazioni aritmetiche. Eppure questa sembra una questione così priva di rilevanza da godere di scarsa attenzione durante tutto l'arco della scuola dell'infanzia. Quando poi, all'ingresso nella scuola elementare, i bambini vengono avviati all'aritmetica scritta, «si pensa», come osserva puntualmente Sinclair de Zwart (1983, p. 86), «che i bambini non siano in grado di sommare, sottrarre, moltiplicare o dividere: questo è ciò che devono apprendere».

<sup>2</sup> Si tratta di una breve storiella che abbiamo costruito e proposto per verificare come i bambini utilizzano e rappresentano il numero sotto i suoi diversi aspetti. Ecco il testo: «C'era una volta un bambino di nome Pallino, che abitava al 4° piano di un condominio al n. 6 di via dei Topastri. Un giorno Pallino invitò a casa sua 2 suoi amici, Allegra e Musone. fecero una grande festa. Giovarono al gioco dell'oca: il primo arrivato ebbe come premio una tavoletta di cioccolato di 9 quadretti; il secondo una tavoletta più piccola con 1 quadretto in meno; il terzo una ancora più piccola con 1 quadretto in meno del secondo arrivato...».

Tab. 3 - Situazioni di rilevazione utilizzate per l'indagine sulle strategie ingenue di rappresentazione delle variazioni di quantità e relativa indicazione delle istruzioni

- a) Due filastrocche popolari: "Tre pere ciondolavano" e "Per una strada che mena a Camogli" (quest'ultima adattata, riducendo la grandezza degli addendi): richiesta di usare carta e matita per ricordare la filastrocca a la risposta alla domanda posta dalla filastrocca stessa;
- b1) *mercatino dei giocattoli*: richiesta di ricordare con carta e matita ciò che è avvenuto al momento del gioco del mercatino;
- b2) *mercatino dei giocattoli*: richiesta di ricordare con carta e matita quante monete avevano all'inizio, che cosa hanno comprato e quanto hanno speso al mercatino, quante monete sono loro rimaste;
- c) *gioco della torta di ciliege*: richiesta di ricordare con l'uso di carta e matita ciò che è avvenuto dopo una prima tornata di gioco (quante ciliege all'inizio, quante dopo il primo giro);
- d) *problemi "personalizzati" di tipo additivo* presentati come piccole storie-indovinello: richiesta di ricordare con l'uso di carta e matita ciò che è avvenuto.

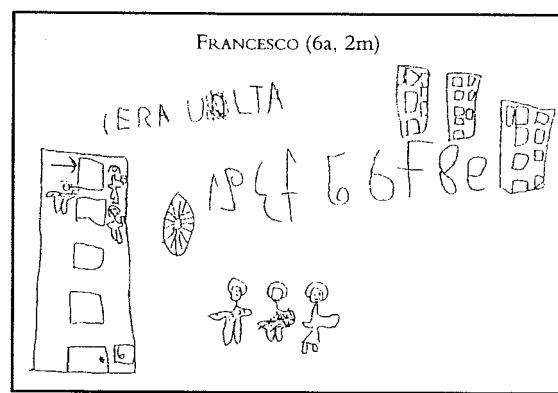


Fig. 6 - Il numero nei suoi diversi aspetti

re. E non si pensa che la notazione di queste operazioni possa creare particolari difficoltà; le difficoltà, se ci sono, sono al livello delle operazioni stesse».

Per contro numerose ricerche (e la stessa nostra esperienza) hanno dimostrato che i bambini di età prescolare dispongono già di una qualche competenza nell'eseguire in concreto operazioni aritmetiche richieste dalla soluzione di problemi orali (Pontecorvo e Pontecorvo, 1986).

Per quanto riguarda la notazione delle operazioni aritmetiche, la rilevazione delle strategie ingenue utilizzate dai bambini in età prescolare sembra necessaria al fine di poterne ricostruire la "preistoria", così come giustamente osservava Vygotskij (1980).

A questo scopo abbiamo condotto la nostra indagine coinvolgendo però soltanto il gruppo c) del nostro campione. I più piccoli (quelli di 3-4 anni) sono stati esclusi perché le loro limitate competenze grafiche avrebbero reso troppo difficile l'interpretazione delle loro prestazioni.

Per la rilevazione abbiamo utilizzato le situazioni-problema riportate in tab. 3. Tutte queste situazioni presentano problemi di tipo additivo, ma con caratteristiche e contesti (e perciò stimoli) molto diversi. Le filastrocche, ad esempio, sono caratterizzate da una componente narrativa molto accentuata. Il "mercatino dei giocattoli" di fatto è un gioco di simulazione che determina un forte coinvolgimento anche emotivo. Il gioco della "torta di ciliege" propone reiterati problemi del tipo "trasforma", ora nella situazione "unisci" ora nella situazione "separa"; per rendere più circoscritta la rilevazione e più mirata l'analisi si è chiesto ai bambini di rappresentare una sola fase del gioco.

Le situazioni-problema, costruite sullo schema di Moser (1985), sono state proposte anche per rilevare il rapporto tra testo, modalità di proposta, grandezza degli addendi e strategie di soluzione; e tra tutte queste variabili e le strategie di rappresentazione.

In tutti i casi le situazioni-problema sono state proposte in contesto ludico e in forma orale;

soltanto dopo che le avevano risolte oralmente (in qualsiasi modo le avessero risolte), si è chiesto ai bambini di rappresentare ciò che essi avevano fatto. In tale richiesta si sono sempre evitate forzature o suggerimenti di sorta. Le prestazioni che abbiamo così raccolto esprimono modalità di rappresentazione molto diverse e molto personali. Seppure con qualche "costrizione", è però possibile raccogliere sotto classi diverse le diverse strategie di rappresentazione delle variazioni di quantità e delle relative operazioni aritmetiche (O.A.).

Ripercorriamo in sintesi le diverse classi da noi individuate.

1. *Nessuna rappresentazione dell'O.A.* Si rappresentano solo alcuni dati del problema o il contesto in cui si colloca; non si rileva alcun tentativo, seppure ingenuo, di formalizzazione; i bambini tentano il disegno degli oggetti senza ancora distribuirli in modo organizzato sul foglio e senza, talvolta, neppure tener conto della quantità considerata; l'attenzione sembra ancora tutta concentrata sugli oggetti, soprattutto se presentano un forte richiamo affettivo.

2. *Rappresentazione pittorica della situazione finale o, talvolta, ma in percentuale minore, della situazione iniziale*, non del processo; talvolta compare il segno del numerale.

3. *Rappresentazione pittorica dell'O.A.* Per "aggiungere" vengono disegnati altri oggetti o segni; per sottrarre si usa la disposizione spaziale o una "corda" che separa o si cancellano gli oggetti con una croce o una macchia di colore; si usano frecce per uguagliare; talvolta si disegna la mano che opera; nella fascia 5-6 anni il risultato finale e, talvolta, i dati di partenza sono numerati (1, 2, 3, ...) o indicati con il segno del numerale singolo. Osserviamo le prestazioni di Federico, Alberto e Gennaro.

Federico (6 anni) racconta con la sua rappresentazione che aveva 5 automobiline e che, dopo averne regalate 2 a Simone, gliene rimangono solo 3 (fig. 7a). Per esprimere la variazione di quantità cancella le automobiline

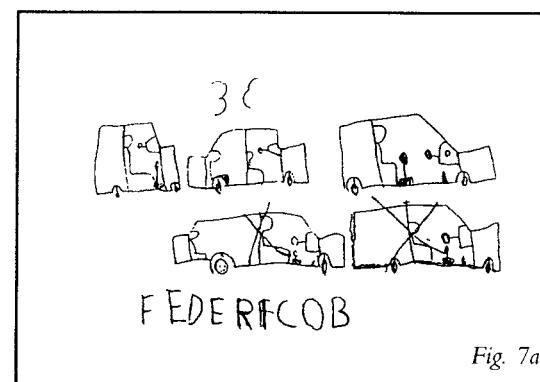


Fig. 7a

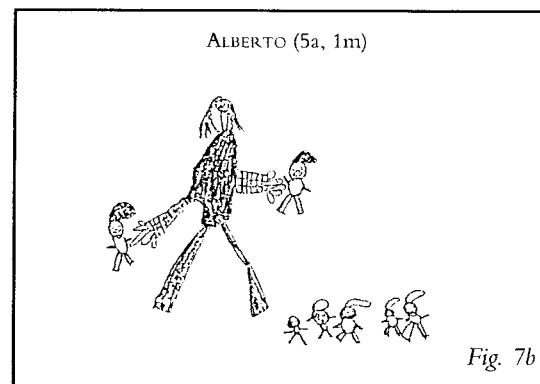


Fig. 7b

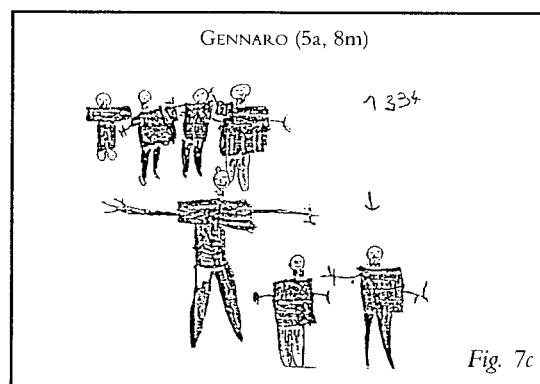


Fig. 7c

Fig. 7 - Diversi modi di rappresentare l'O.A.

che ha regalato; usa cioè una strategia ingenua e immediata già rilevata da Sastre e Moreno (1976).

Alberto (5,1) risolve oralmente il quesito: «Alberto ha 5 puffi; per giocare ha bisogno di

7 pufi. Quanti ne deve ancora prendere?». Nella rappresentazione grafica colloca in fila i 5 pufi che già ha e si disegna mentre prende i 2 pufi che ancora gli servono per giocare (fig. 7b).

Gennaro (5,8) usa la disposizione spaziale e disegna se stesso che opera la variazione di quantità per raccontare come ha risolto la situazione-problema propostagli: «Gennaro ha 6 omini della Lego e ne presta alcuni a Paolo; ora ne ha solo più 4. Quanti ne ha prestati a Paolo?» (fig. 7c).

In molte prestazioni che si collocano in questa classe si nota una prima organizzazione della rappresentazione grafica che, però, sembra rispondere più a una esigenza descrittiva (o narrativa) che non all'obiettivo di rappresentare la variazione di quantità operata. È il caso di Alberto. Nella prestazione di Gennaro si nota già un più accentuato tentativo di formalizzazione, ricorrendo alla disposizione spaziale, alle mani che operano e a una freccia per evidenziare la risposta.

4. *Rappresentazione pittorica integrata da parole e numeri della situazione iniziale, dell'O.A., della situazione finale.* Matteo (6 anni), ad esempio, rappresenta compiutamente la sua esperienza al mercatino dei giocattoli: disponeva di 5 monete, ha comprato una *micromachine* spendendo 3 monete e 2 gommine spendendo 1 moneta, raccoglie la "spesa" con una corda e accanto scrive che ha speso in tutto 4 monete; in basso scrive, disegnando la moneta e tracciando il segno del numerale, che ha avanzato una moneta (fig. 8a).

Enrico (6,3), invece, usa parole e numeri per descrivere la situazione problema che ha risolto. È interessante notare dove ha collocato il numero 3 che indica quanti lecca-lecca (chupa-chupa, secondo la specifica denominazione commerciale) ha in più di Giulia (fig. 8b).

In tab. 4 riportiamo una corrispondenza tra strategie ingenue di rappresentazione adottate dai bambini di 5-6 anni del nostro campione e situazioni problematiche proposte.

I bambini da noi osservati non hanno mai

Tab. 4 - Corrispondenza tra situazioni problematiche proposte e strategie ingenue di rappresentazione adottate (valori in percentuale)

Situazione problematiche proposte	TIPOLOGIA DELLE STRATEGIE ADOTTATE			
	1	2	3	4
<i>Filastronca</i>				
"Tre pere cioldolavano"	3.7	18.6	44.4	33.3
<i>Filastronca</i>				
"Per una strada ... Camogli"	3.3	21.8	68.7	6.2
<i>Torta di ciliege</i>	-	8.3	62.6	29.1
<i>Mercatino dei giocattoli</i>				
(I proposta)	13.1	73.6	13.3	-
<i>Mercatino dei giocattoli</i>				
(II proposta)	-	16	12	72
<i>Problemi del tipo "trasforma"</i>	5.9	23.9	34.4	35.8
<i>Problemi del tipo "combina"</i>	5	57.6	5	32.4
<i>Problemi del tipo "uguaglia"</i>	7.6	12.5	36.4	43.5
<i>Problemi del tipo "confronta"</i>	9	30.5	18.1	42.4

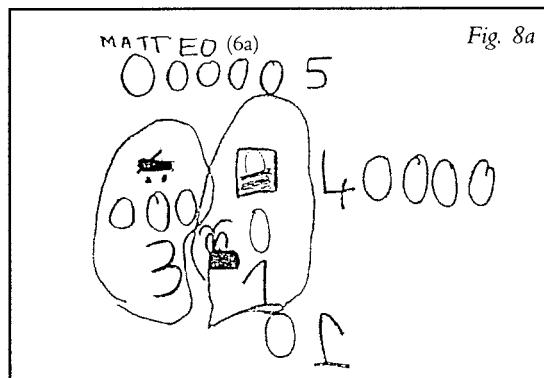


Fig. 8a

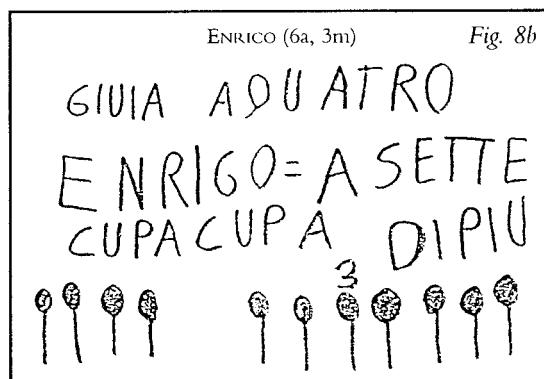


Fig. 8b

Fig. 8 - Primi tentativi di formalizzazione

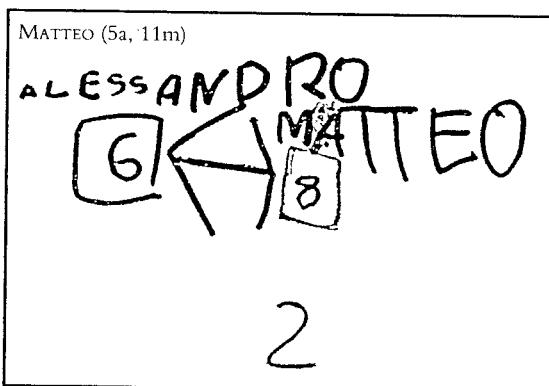


Fig. 9 - Ricerca di una struttura più formale

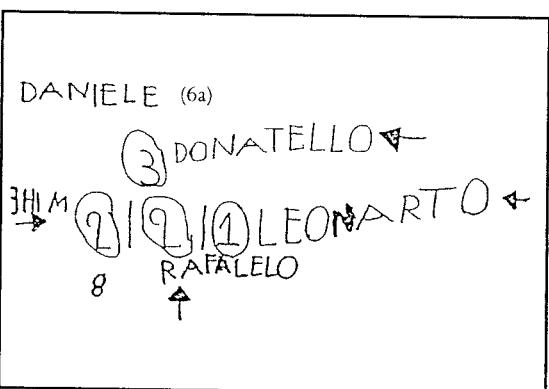


Fig. 10 - Mancano solo i segni convenzionali dell'O.A.

utilizzato i segni convenzionali +, -, =. Hanno, invece, fatto sovente ricorso ad alcuni segni e formalismi abitualmente proposti dalla scuola dell'infanzia, quali le "corde" o le frecce. Quale sia la strategia adottata, poiché sempre si tratta di rappresentazioni che seguono la soluzione di un problema orale o di una situazione-problema vissuta, la grande maggioranza dei bambini comincia con il rappresentare (con il disegno, tracciando segni o scrivendo il numerale) la risposta. Solo in un secondo tempo si rappresentano in sequenza le diverse fasi: situazione di partenza – operazione – situazione finale.

Quando aumenta il numero degli addendi

o diventa più consapevole l'esigenza comunicativa, si ricerca una struttura più formale, anche se ancora molto personale e lontana dai formalismi convenzionali. Matteo (5,11), ad esempio, per rappresentare l'operazione di confronto che ha effettuato concretamente per risolvere il quesito «Matteo ha 8 lecca-lecca, cioè 2 più di Alessandro. Quanti ne ha Alessandro?», usa una gran freccia che parte da 8 e va al 6, sopra il numero 6 scrive Alessandro e in basso scrive il numero 2, cioè i 2 lecca-lecca che ha in più del suo amico (fig. 9).

Contemporaneamente, di solito, si comincia a fare ricorso a segni-simbolo, oppure ancora al disegno, ma ridotto all'essenziale, quasi una *silhouette*, all'uso della marca o (ed è abbastanza frequente) all'uso del colore in funzione simbolica. Taluni, che ormai usano con una certa padronanza la scrittura del numerale, si limitano a scrivere in sequenza i numeri relativi alla situazione di partenza, alla variazione di quantità ed alla situazione finale. È il caso di Daniele (6 anni) che scrive di seguito i dati del problema (3 tartarughe Donatello, 2 Michelangelo, 2 Raffaello, 1 Leonardo) e la soluzione (fig. 10).

Sembrerebbe dunque possibile rintracciare un percorso evolutivo nelle strategie di rappresentazione delle variazioni di quantità. Rimangono valide tutte le cautele espresse a proposito della scrittura del numerale; anche qui si danno rappresentazioni più o meno formali e diverse, come si nota in tab. 4, a seconda del tipo di situazione-problema.

All'inizio la variazione di quantità viene rappresentata come se fosse una sequenza narrativa espressa con il disegno; dapprima senza tener conto delle 3 fasi essenziali di ogni situazione-problema (situazione iniziale, operazione che comporta la variazione di quantità, situazione finale), poi tenendone conto.

Una seconda grande tappa è rappresentata da una prima organizzazione dei diversi dati; si comincia a tener conto di alcune convenzioni (dall'alto in basso; da sinistra a destra); si dà più rilevanza alla sequenza che agli oggetti;

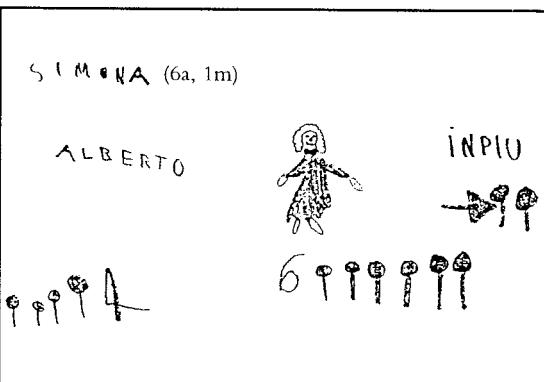


Fig. 11 - Incidenza delle strategie di soluzione sulle strategie di rappresentazione

si cominciano ad usare strumenti formali, quali le corde o le frecce, conosciuti a scuola.

Infine, si tentano organizzazioni più formali, che in qualche modo manifestano un maggior decentramento, un prendere le distanze dagli oggetti concreti e, talvolta, una qualche rassomiglianza con la codificazione formale convenzionale.

Nel corso della ricerca abbiamo poi rilevato una stretta relazione tra rappresentazione delle variazioni di quantità e delle relative operazioni aritmetiche e strategie di soluzione, che a loro volta sono condizionate da: testo e tipologia del problema, modalità della proposta, grandezza degli addendi, possibilità o meno di manipolare dei materiali, preconoscenze. Quando il problema è inserito in un contesto di gioco o in un'attività molto coinvolgente, ne abbiamo già accennato, la rappresentazione è più "narrativa" e meno strutturata.

Assai meno narrative sono le rappresentazioni dei problemi di tipo "trasforma", che abbiamo presentato sia nella situazione "unisci" sia in quella "separa" (Cfr. Moser, 1985). La maggioranza dei bambini del campione (70%) rappresenta in qualche modo l'operazione aritmetica; di questi circa il 50% dà una rappresentazione completa della situazione iniziale, della variazione delle quantità e della situazione finale.

Le strategie utilizzate per la soluzione del problema sembrano determinare almeno in parte le strategie di rappresentazione. Nei problemi di tipo "trasforma" e "combina" i bambini, sia che operino con i materiali sia attraverso la rappresentazione mentale, aggiungono oggetti nella situazione "unisci" e tolgono o separano oggetti nella situazione "separa".

Anche nella rappresentazione grafica, quando si tratta di unire, disegnano altri oggetti, tracciano segni, scrivono il numero corrispondente alla quantità di oggetti aggiunta a quella di partenza; quando si tratta di separare, disegnano la quantità di partenza (o tracciano un numero di segni corrispondente a tale quantità), successivamente cancellano gli oggetti che hanno separato o utilizzano corde o frecce oppure la disposizione spaziale. L'incidenza della strategia di soluzione è ancora più evidente nei problemi di tipo "confronta" e "uguaglia". Simona (6,1), ad esempio, opera con i materiali, allinea sul tavolo i suoi 4 lecca-lecca, di fianco ne allinea 4 per Alberto, poi aggiunge i 2 che Alberto ha di più. La strategia utilizzata da Simona è tra le più diffuse nella fascia 5-6 anni; per confrontare 2 raccolte dapprima si uguaglia, poi si unisce o si separa. In sede di rappresentazione disegna i suoi 4 lecca-lecca, poi 4 di Alberto; per uguagliare ne aggiunge 2; infine evidenzia che Alberto ne ha 2 di più (fig. 11).

Le rappresentazioni grafiche confermano, di solito, le difficoltà incontrate dai bambini nella comprensione del testo. L'introduzione di domande intermedie (*Chi di più? Di più di chi?...*) e una maggiore "personalizzazione" del problema, la riduzione della grandezza degli addendi, la possibilità di operare con materiali (gli stessi oggetti della situazione-problema o anche oggetti più neutri, ad esempio delle palline, dei cubetti, ecc.) sembrano consentire una maggiore accessibilità e dunque un comportamento più adeguato in sede di soluzione e una rappresentazione più organizzata.

Quando la consegna è più articolata, anche la rappresentazione diventa più completa. Per

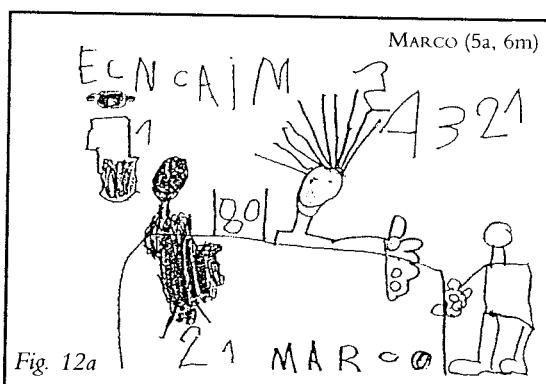


Fig. 12a



Fig. 12 - Una consegna più precisa determina una rappresentazione meglio organizzata

verificare questa ipotesi abbiamo riproposto il mercatino dei giocattoli a distanza di tempo, ma nello stesso modo. La consegna più precisa ha determinato una rappresentazione meglio organizzata e più completa, tanto che la maggior parte delle prestazioni dei bambini (84%) si colloca tra il punto 3 e il punto 4 della nostra classificazione (figg. 12a-12b).

#### Suggerimenti per un ripensamento delle proposte didattiche

Immersi come sono in un mondo caratterizzato dalla presenza massiccia di immagini, parole e numeri, i bambini si trovano presto nella necessità di interpretare questi segni e

contemporaneamente sono spinti a produrne. Per interpretarli e produrli (prima ancora di riprodurli) cominciano ad elaborare delle personali e talvolta originali teorie, di cui occorre tener conto.

Da parte di tutti i ricercatori viene evidenziata la difficoltà di capire quali idee (teorie ingenue) si facciano i bambini sulla scrittura dei numeri e come queste si evolvano. È una difficoltà che abbiamo incontrato anche noi. Non è semplice con bambini di 3-6 anni condurre un'intervista per far emergere non solo le strategie che hanno utilizzato, ma soprattutto le teorie ingenue a cui hanno fatto riferimento. Poiché però è indubbio che i bambini si facciano delle teorie, occorre ricercarle nelle loro produzioni. Paolo (4 anni), ad esempio, scrive il numero 2 disegnando 2 circoletti con un'asta verticale (del tutto simili), uno più piccolo e l'altro più grande. Quando mostra il suo disegno all'insegnante, precisa: «Questo (indica il segno più piccolo) è 1 e questo più grande è 2» (fig. 13).

I bambini sembrano molto presto essere convinti che per scrivere numeri diversi occorrono segni diversi. Nel caso di Paolo, appena citato, la differenziazione viene realizzata attraverso la dimensione; in altri casi per differenziare si ricorre a segni di forma diversa (vedi fig. 2).

Dall'analisi delle prestazioni e delle interviste, per quanto queste debbano essere considerate con cautela, sembra emergere un'evoluzione anche nelle teorie che i bambini via via elaborano. Quando ormai hanno raggiunto una certa padronanza nella scrittura del segno convenzionale del numerale e, soprattutto, sanno far corrispondere ogni numerale a una determinata quantità di oggetti, tentano strade non ancora percorse. Giulio (5,6), volendo scrivere che per misurare la lunghezza di un cartellone ha riportato per 12 volte la base di un triangolo da lui scelto come unità e strumento di misura, disegna il triangolo ed il cartellone; sotto il cartellone disegna 12 segmenti e sopra scrive il numero che indica la misura

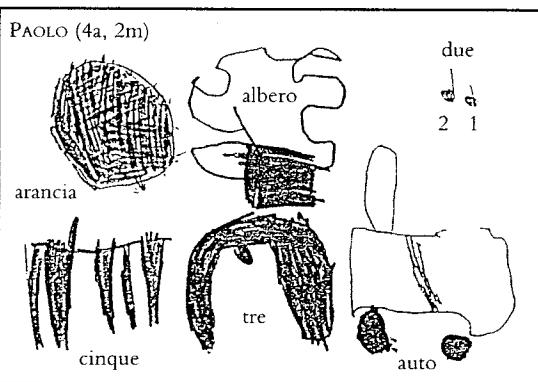


Fig. 13 - I bambini elaborano teorie sul numero scritto

mente le quantità e di scrivere i numerali e, soprattutto, le operazioni aritmetiche, può essere una procedura didattica efficace. Attraverso la rappresentazione grafica è possibile rilevare in qualche modo il processo, le strategie ed i modelli che vengono utilizzati per la risoluzione di un problema.

Una volta rilevate le strategie utilizzate, è possibile progettare in modo più mirato i successivi interventi. Certo non è sufficiente riferirsi alla prima osservazione o a una o poche produzioni; inoltre le rilevazioni vanno interpretate "in costellazione", tenendo conto sia di altre rilevazioni effettuate in contesti diversi e con l'uso di materiali diversi sia delle modalità della proposta e della consegna che hanno portato alla produzione di ogni rappresentazione.

La lettura di una rappresentazione grafica da parte di un bambino diverso da chi l'ha prodotta rende esplicita l'esigenza di organizzare in modo meno casuale i dati e di utilizzare segni convenzionali conosciuti dal gruppo. Quando i bambini diventano consapevoli di questa necessità si apre la strada all'adozione dei segni e dei formalismi convenzionali.

Infine la rappresentazione e la lettura delle rappresentazioni favoriscono il "ripercorso" e dunque il ripensamento, la rielaborazione dell'esperienza. Il commento con i bambini delle rappresentazioni delle operazioni eseguite per risolvere problemi diventa un'occasione per riprendere ed analizzare sia le strategie di soluzione sia le strategie di conta.

Dipartimento di Matematica  
Università di Bologna  
[18 aprile 1994]

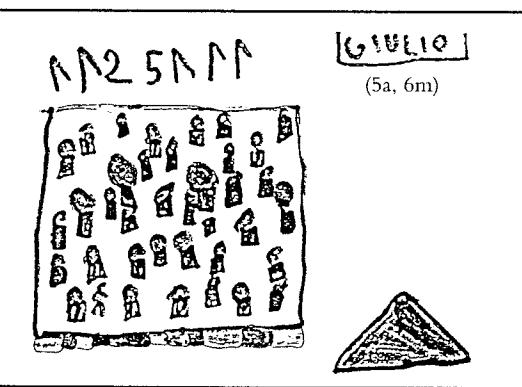


Fig. 14 - Teorie e strategie in evoluzione

senza considerare il valore posizionale delle diverse cifre, ma assegnando a ciascuna il valore di cardinale singolo; è come se scrivesse un'espressione aritmetica senza collegare le diverse cifre con il segno convenzionale dell'addizione (fig. 14).

La stessa richiesta di rappresentare grafica-

#### Riferimenti bibliografici

BUFFA G. (1986), *Fra numeri e dita, dal conteggio sulle dita alla nascita del numero*, Zanichelli, Bologna.  
CASTIGLIA D., PONTECORVO C. (1990), «L'evoluzione

delle abilità matematiche». In C. Pontecorvo *et al.*, *Continuità educativa dai quattro agli otto anni*, La Nuova Italia, Firenze.

- D'AMORE B. (1993), *Problemi*, Angeli, Milano.
- DANTZIG T. (1967), *Il numero, linguaggio della scienza*, La Nuova Italia, Firenze.
- FERREIRO E., TEBEROSKJ A. (1979), *Los sistemas de escrituras en el desarrollo del niño*, Siglo XXI Editores, Mexico, (tr. it. *La costruzione della lingua scritta nel bambino*, Giunti Barbèra, Firenze, 1985).
- HUGHES M. (1982), «Rappresentazione grafica spontanea del numero nei bambini», *Età evolutiva*, 12, 5-10.
- KAMII C. (1980), «Equations in first grade arithmetic: A problem for the “disadvantaged” or for first graders in general?». Comunicazione presentata al *Congresso della American Educational Research Association*, Boston.
- MOSER J.M. (1985), «Alcuni aspetti delle più recenti ricerche e analisi delle strategie di risoluzione dei problemi verbali». In L. Chini Artusi (a cura di), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, UMI-Zanichelli, Bologna.
- PONTECORVO C. (1985), «Figure, parole, numeri: un problema di simbolizzazione», *Età evolutiva*, 22, 5-33.
- PONTECORVO C., PONTECORVO M. (1985), *Psicologia dell'educazione. Conoscere a scuola*, Il Mulino, Bologna.
- RESNIK L.B., FORD W.W. (1991), *Psicologia della matematica e apprendimento scolastico*, SEI, Torino.
- SASTRE G., MORENO M. (1976), «Représentation graphique de la quantité», *Bulletin de Psychologie de l'Université de Paris*, XXX, 346-355.
- SINCLAIR DE ZWART H. (1983), «L'acquisizione della scrittura alfabetica e della notazione matematica». In G. Stella, F. Nardocci (a cura di), *Il bambino inventa la scrittura*, Angeli, Milano, pp. 85-101.
- SINCLAIR A. (1988), «La notation numérique chez l'enfant». In H. Sinclair De Zwart, *La production de notations chez le jeune enfant*, Presses Universitaires de France, Paris, pp. 71-97.
- VYGOTSKIJ L.S. (1980), tr. it. *Il processo cognitivo*, Boringhieri, Torino.